جبر لي

تعريف : نقول ان الجبر A غير التجميعي انه يشكل جبر لي على الحقل التبديلي والاحادي R اذا تحققت الشروط :

① A مقاس على R

② تعرف عليه عملية ضرب داخلية على A

$$[\ ,\ ] : A \times A \longrightarrow A$$
$$(x, y) \longrightarrow [x, y]$$

تحقق الشروط الآتية

① $\forall x \in A \quad [x, x] = 0$

② $\forall x, y, z \in A \ ; \ [x+y, z] = [x, z] + [y, z]$
$[x, y+z] = [x, y] + [x, z]$

③ $\forall \alpha \in R \quad \forall x, y \in A \ ; \ \alpha[x, y] = [\alpha x, y]$
$= [x, \alpha y]$

④ $\forall x, y, z \in A \ ; \ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]]$
$= 0$

مبرهنة :

ليكن A جبر لي على الحقل R عندئذ :

① $\forall a \in A \ ; \ [a, 0] = 0$

② $\forall a, b \in A \ ; \ [a, b] = -[b, a]$

③ $\forall a, b, c \in A \ ; \ [a, [b, c]] = [b, [a, c]] + [c, [b, a]]$

البرهان :

① ليكن $a \in A$ عندئذ

$[a, 0] = [a, 0+0] = [a, 0] + [a, 0]$ ← خاصية التوزيع

($[a, 0] \in A$)

نأخذ النظير الجمعي

بما ان A زمرة لذلك يوجد عنصر نظير $-[a, 0] + [a, 0] = -[a, 0] + [a, 0] + [a, 0]$

$0 = [a, 0]$

(2) $\forall a,b \in A \quad [a+b, a+b] = [a+b, a] + [a+b, b]$

$0 = [a,a] + [a,b] + [a,b] + [b,b]$

$0 = [b,a] + [a,b]$

نلاحظ نغير الحرفين

$-[b,a] = [a,b]$

(3) $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$

$[a,[b,c]] = -[b,[c,a]] - [c,[a,b]]$

$= -[b,-[a,c]] - [c,-[b,a]]$

$= [b,[a,c]] + [c,[b,a]]$

تعريف :

لتكن A جبر لي فوق الحلقة R تسمى A تبديلي إذا تحقق الشرط

$\forall a,b \in A \;;\; [a,b] = 0$

نسمي العنصر $e \in A$ عنصر محايد من اليمين إذا كان

$\forall a \in A \;;\; [a,e] = a$

بنفس الطريقة نعرف المحايد من اليسار

مبرهنة :

لتكن A جبر لي فوق الحلقة R إذا وجد في A محايد من اليمين (أو اليسار) عندئذ

$A = 0$

البرهان

نفرض أن $e \in A$ محايد من اليمين عندئذ

لأنه محايد من نفسه $e = [e,e] = 0$ لأنه محايد

ومنه أياً كان $a \in A$ فإن

$a = [a,e] = [a,0] = 0$

ومنه $A = 0$

مبرهنة
كل جبر تجميعي هو جبر لي

البرهان :
ليكن A جبر معرف على الحلقة R ولنفرض أن الجبر A تجميعي

$\forall a, b, c \in A \quad (a.b).c = a(b.c)$

إن A مودول معرف على الحلقة R
لنعرف عملية ضرب داخلية على A بالشكل

$[\,,\,] : A \times A \longrightarrow A$

$(a,b) \longrightarrow [a,b]$

$[a,b] = a.b - b.a$

نتيجة

1) $\forall a \in A \; ; \; [a,a] = aa - aa = 0$

2) $\forall a,b,c \in A \quad [a+b,c] = (a+b)\,c - c(a+b)$

$= ac + bc - ca - cb$

$= ac - ca + bc - cb$

$= [a,c] + [b,c]$

$[a,b+c] = a(b+c) - (b+c).a$

$= a.b + ac - ba - ca$

$= (ab - ba) + (ac - ca)$

$= [a,b] + [a,c]$

3) $\forall \alpha \in R \quad \forall a,b \in A \; ; \quad \alpha[a,b] = \alpha(ab - ba)$

$= \alpha(ab) - \alpha(ba)$

$= (\alpha a)b - b(\alpha a)$

$= [\alpha a, b]$

4) $\forall a,b,c \in A \; ; \; [a,[b,c]] = a[b.c] - [b,c].a$

$= a(bc - cb) - (bc - cb)a$

$= abc - acb - bca + cba$

الثاني: $[b,[c,a]] = b[c,a] - [c,a]b$

$= b(ca - ac) - (ca - ac)b$

$= bca - bac - cab + acb$

الثالث:

$[c,[a,b]] = c(ab - ba) - (ab - ba)c$

$= cab - cba - abc + bac$

بجمع الحدود الثلاثة السابقة نحصل على

$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$

ومنه فإن A جبر لي

تطبيقات الاشتقاق في جبر لي

تمرين:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R نسمي التطبيق

$d: A \to A$

أنه تطبيق اشتقاق إذا حقق

① $\forall x,y \in A : d(x+y) = d(x) + d(y)$

② $\forall \alpha \in R, \forall x \in A : d(\alpha x) = \alpha\, d(x)$

③ $\forall x,y \in A \quad d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)]$

ينتج مباشرة من التعريف أن كل من [illegible] $I: A \to A$ هو (الضرب والمطابق) هو تطبيق اشتقاق في A ونرمز لجميع تطبيقات الاشتقاق في A بالشكل $Der(A)$

ملاحظة:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية R فإن مجموعة تطبيقات الاشتقاق $Der(A)$ تشكل مودولا فوق R بالنسبة للعمليات التالية

$\forall d_1, d_2 \in Der(A)\ ;\ (d_1+d_2)(a) = d_1(a) + d_2(a) \quad \forall a \in A$

$\forall \alpha \in R \quad \forall d \in Der(A)\ ;\ (\alpha d)(x) = \alpha d(x) \quad \forall x \in A$

البرهان :

$\forall d_1, d_2 \in Der(A)$

ولنبرهن من أن $d_1+d_2 \in Der(A)$ برهنا سابقاً أن d_1+d_2 يحقق الشرط الأول والثاني الواردين في تعريف الاشتقاق ولنبرهن أن d_1+d_2 يحقق الشرط الثالث

$\forall a, b \in A\ ;\ (d_1+d_2)([a,b]) = d_1([a,b]) + d_2([a,b])$

$= [d_1(a), b] + [a, d_1(b)] + [d_2(a), b] + [a, d_2(b)]$

$= [d_1(a)+d_2(a), b] + [a, d_1(b) + d_2(b)]$

$= [(d_1+d_2)(a), b] + [a, (d_1+d_2)(b)]$

ومنه فإن d_1+d_2 تحقيق اشتقاق

- ليكن $\alpha \in R$ ، $d \in Der(A)$ برهنا سابقاً أن $\alpha.d$ تحقق الشرطين ① و ② الواردين في تعريف الاشتقاق ولنبرهن الآن $\alpha.d$ يحقق الشرط ③

$\forall x, y \in A\ ;\ (\alpha d)([x,y]) = \alpha d([x,y])$

$= \alpha([d(x), y] + [x, d(y)])$

$= \alpha [d(x), y] + \alpha [x, d(y)]$

$= [\alpha d(x), y] + [x, \alpha d(y)]$

$= [(\alpha d)(x), y] + [x, (\alpha d)(y)]$

ومنه فإن $\alpha d \in Der(A)$

مما سبق فإن $Der(A)$ تشكل جبرية جزئية فوق الحقل R